Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS EBCR, veuillez visiter :
btsebcr.fr/annales-sujets-et-corriges

BTS EBCR

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Variable selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Départ d'un train à très haute vitesse : équation différentielle, étude de fonction et calcul intégral (13 questions) **Page 3**

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités conditionnelles, loi binomiale et test d'hypothèse (13 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsebcr.fr/assets/annales/bts-ebcr/E2 - Mathématiques/2018/BTS EBCR - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Départ d'un train à très haute vitesse : équation différentielle, étude de fonction et calcul intégral

Un projet de train à propulsion électromagnétique fixe l'objectif d'atteindre 400 km/h en moins de deux minutes, et sa distance parcourue est modélisée par une fonction. L'exercice étudie cette fonction par une équation différentielle, ses variations et la vitesse du wagon, puis calcule l'aire d'une pièce destinée aux gares.

A. Résolution d'une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l'équation différentielle homogène y' - 0,2y = 0.

On réécrit l'équation sous la forme $y' = 0{,}2y$. D'après la formule des solutions de $y' + ay = 0$, avec $a = -0{,}2$, toute solution est une fonction exponentielle. La constante multiplicative est réelle et l'expression obtenue est définie et dérivable sur $[0, +\infty[$. Elle vérifie l'équation puisque sa dérivée est égale à $0{,}2y(t)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0, +\infty[$, les solutions sont $y(t) = Ce^{0{,}2t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = -15t - 75 est une solution de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

1. Pour $g(t) = -15t - 75$, on a $g'(t) = -15$.
2. On calcule alors $g'(t) - 0{,}2g(t) = -15 - 0{,}2(-15t - 75) = -15 + 3t + 15 = 3t$.

Le membre de gauche est donc égal au second membre pour tout t. La fonction proposée est bien une solution particulière de l'équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) - 0{,}2g(t) = 3t$, donc g est bien une solution particulière.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

Les solutions de l'équation complète s'obtiennent en ajoutant à la solution particulière $g(t) = -15t - 75$ toutes les solutions de l'équation homogène associée. D'après la question 1, ces dernières sont de la forme $Ce^{0{,}2t}$, où C est une constante réelle. Cette somme donne l'ensemble des solutions sur l'intervalle indiqué.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les solutions sont $y(t) = Ce^{0{,}2t} - 15t - 75$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 4°. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t qui vérifie la condition initiale f(0) = 0.

1. La solution générale s'écrit $f(t) = Ce^{0{,}2t} - 15t - 75$.
2. La condition initiale donne $f(0) = C - 75 = 0$, donc $C = 75$.

En remplaçant la constante dans la solution générale puis en regroupant les termes constants, on obtient l'expression de f utilisée dans la partie B.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La solution vérifiant $f(0) = 0$ est $f(t) = 75(e^{0{,}2t} - 1) - 15t$.

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). À partir des expressions de f et de f' fournies par le logiciel de calcul formel, résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

Le logiciel donne $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. Comme 15 est positif, $f'(t) \geq 0$ équivaut à $e^{0,2t} \geq 1$. La fonction exponentielle étant strictement croissante, cette condition équivaut à $0,2t \geq 0$, donc à $t \geq 0$. Elle est satisfaite sur tout l'intervalle étudié.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La dérivée est positive sur tout l'intervalle : $f'(t) \geq 0$ pour $t \in [0, 3]$.

Question 1° b). Déduire du signe de f' les variations de la fonction f sur [0, 3].

La dérivée est nulle en $t = 0$, puis strictement positive pour $0 < t \leq 3$. La fonction f est donc croissante sur $[0, 3]$. Aux bornes, $f(0) = 0$ et $f(3) = 75(e^{0,6} - 1) - 45$. Le tableau résume son sens de variation.

t	**0**	**3**
Signe de $f'(t)$	0	+
Variation de f	0	$75(e^{0,6} - 1) - 45$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est croissante sur $[0, 3]$, de $f(0) = 0$ à $f(3) = 75(e^{0,6} - 1) - 45$.

Question 2°. Déterminer la distance parcourue par le wagon au bout d'une minute, en kilomètres, et arrondir le résultat au dixième.

La distance parcourue en une minute est $f(1)$. En substituant $t = 1$ dans l'expression donnée, on obtient $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15$. La valeur non arrondie est environ $1,605$ km. L'arrondi demandé au dixième conserve un seul chiffre après la virgule.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Au bout d'une minute, le wagon a parcouru environ $1,6$ km.

Question 3° a). Sachant que f'(t) correspond à la vitesse en kilomètres par minute, déterminer la vitesse du wagon à t = 2 minutes et arrondir le résultat au dixième.

1. La vitesse est donnée par $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$, en kilomètres par minute.
2. À deux minutes, $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1) \approx 7,377$ km/min.

Après arrondi au dixième, on obtient $7,4$ km/min. Pour la comparer à l'objectif exprimé en kilomètres par heure, cette valeur non arrondie correspond à environ $442,6$ km/h.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> À $t = 2$ minutes, la vitesse est d'environ $7,4$ km/min.

Question 3° b). Dire si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse en tenant compte de l'objectif de 400 km/h en moins de deux minutes.

À deux minutes, la vitesse vaut environ $442{,}6$ km/h. Pour vérifier qu'elle dépasse le seuil avant deux minutes, on résout $15(e^{0{,}2t}-1)=400/60$, puisque $f'(t)$ est en km/min. On trouve $t=\ln(13/9)/0{,}2\approx 1{,}839$ minute. Le seuil de 400 km/h est donc atteint avant la limite fixée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, l'objectif est atteint : le seuil de 400 km/h est franchi après environ $1{,}839$ minute.

Question 4°. Parmi les trois expressions proposées, recopier sans justification l'équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2.

La formule de la tangente au point d'abscisse 2 est $y=f'(2)(t-2)+f(2)$. En remplaçant par les expressions de f et de f', le coefficient directeur vaut $15(e^{0{,}4}-1)$, et le terme constant se simplifie en $45e^{0{,}4}-75$. On retient donc la troisième proposition.

$$y=15(e^{0{,}4}-1)t+45e^{0{,}4}-75$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La tangente au point d'abscisse 2 est $y=15(e^{0{,}4}-1)t+45e^{0{,}4}-75$, soit la troisième proposition.

C. Calcul intégral

Question 1°. Choisir, parmi les réponses proposées, l'aire du rectangle OPQR en unités d'aire.

Le rectangle $OPQR$ s'étend de $x=0$ à $x=3$, donc sa largeur est 3. Son bord supérieur est la droite $y=2{,}25$, ce qui donne une hauteur de $2{,}25$. L'aire d'un rectangle est le produit de sa largeur par sa hauteur : $A_1=3\times 2{,}25$. Parmi les réponses proposées, on choisit celle qui correspond à ce produit.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_1=6{,}75$ unités d'aire.

Question 2°. À l'aide de la primitive fournie, calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de g, l'axe des abscisses et les droites x = 0 et x = 3.

1. Sur $[0,3]$, $g(x)=\dfrac{27x}{2x^2+18}$ est positive. L'aire cherchée est donc $A_2=\int_0^3 g(x)\,dx$.
2. Avec la primitive fournie, $A_2=\dfrac{27}{4}[\ln(x^2+9)]_0^3=\dfrac{27}{4}\ln(18/9)=\dfrac{27}{4}\ln 2$.

La valeur approchée donne l'aire en unités d'aire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_2=\dfrac{27}{4}\ln 2\approx 4{,}679$ unités d'aire.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'aire A de la pièce hachurée, en unités d'aire, et arrondir au millième.

Sur la moitié droite, l'aire hachurée est l'aire du rectangle diminuée de l'aire sous la courbe, soit $A_1 - A_2$. La pièce étant symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, son aire totale est le double : $A = 2(A_1 - A_2) = 2(6{,}75 - \frac{27}{4}\ln 2)$. L'arrondi au millième est demandé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'aire totale de la pièce est $A \approx 4{,}143$ unités d'aire.

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités conditionnelles, loi binomiale et test d'hypothèse

Une étude distingue l'obsolescence technique et logicielle de smartphones et fournit leurs fréquences ainsi qu'une probabilité conditionnelle. L'exercice étudie ensuite la réparabilité d'un lot selon une loi binomiale, puis teste si un sondage sur l'opinion concernant la marque B est compatible avec les résultats d'une enquête.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des données de l'énoncé sur une population de 200 smartphones, compléter le tableau d'effectifs croisant l'obsolescence technique et l'obsolescence logicielle, avec les totaux.

Les pourcentages appliqués aux 200 smartphones donnent 16 cas d'obsolescence logicielle et 6 cas d'obsolescence technique. Parmi les 16 cas logiciels, 12,5 % sont aussi techniques, soit 2 smartphones. On complète les autres cases par différence, puis on calcule les totaux.

Smartphones	Touchés par l'obsolescence logicielle	Non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
Touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
Non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

Tableau des effectifs complété

Smartphones	touchés par l'obsolescence logicielle	non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

✓ RÉPONSE À RETENIR

Effectifs croisés : 2, 4, 14 et 180. Totaux des lignes : 6 et 194 ; totaux des colonnes : 16 et 184 ; total général : 200.

Question 2°. Donner les probabilités P(T), P(L) et P_L(T), où T désigne l'obsolescence technique, L l'obsolescence logicielle et P_L(T) la probabilité de T sachant que L est réalisé.

Les fréquences données dans l'énoncé correspondent aux probabilités des événements. La troisième valeur est la probabilité conditionnelle de l'obsolescence technique sachant que le smartphone est touché par l'obsolescence logicielle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0{,}03$, $P(L) = 0{,}08$ et $P_L(T) = 0{,}125$.

Question 3° a). Calculer la probabilité qu'un smartphone soit touché à la fois par l'obsolescence technique et par l'obsolescence logicielle : P(T ∩ L).

On utilise la formule de probabilité conditionnelle : $P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T)$. Ainsi, $P(T \cap L) = 0{,}08 \times 0{,}125 = 0{,}01$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cap L) = 0{,}010$, soit 1 %.

Question 3° b). Calculer la probabilité qu'un smartphone soit touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence : P(T ∪ L).

Pour calculer la probabilité d'être touché par au moins un type d'obsolescence, on retire l'intersection, comptée deux fois dans la somme des probabilités : $P(T \cup L) = P(T) + P(L) - P(T \cap L) = 0{,}03 + 0{,}08 - 0{,}01 = 0{,}10$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cup L) = 0{,}100$, soit 10 %.

Question 3° c). Calculer P_T(L), la probabilité d'obsolescence logicielle sachant que le smartphone est touché par l'obsolescence technique.

La probabilité conditionnelle recherchée est le quotient de la probabilité de l'intersection par celle de l'événement qui conditionne :

$$P_T(L) = \frac{P(T \cap L)}{P(T)} = \frac{0{,}01}{0{,}03} = \frac{1}{3}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_T(L) \approx 0{,}333$, soit 33,3 %.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui compte les smartphones non réparables parmi 50 smartphones prélevés, suit une loi binomiale et en déterminer les paramètres.

Chaque prélèvement est indépendant, car le stock est assimilé à un tirage avec remise. La probabilité qu'un smartphone soit non réparable reste constante et vaut $0{,}045$. Le nombre X de smartphones non réparables sur 50 prélèvements suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}045$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0{,}045)$.

Question 2°. Calculer la probabilité que les 50 smartphones du lot soient tous réparables.

Les 50 smartphones sont réparables si aucun n'est non réparable, donc si $X = 0$. La probabilité qu'un smartphone soit réparable vaut $1 - 0{,}045 = 0{,}955$. Par indépendance, $P(X = 0) = 0{,}955^{50} \approx 0{,}100$, arrondi à 10^{-3}.

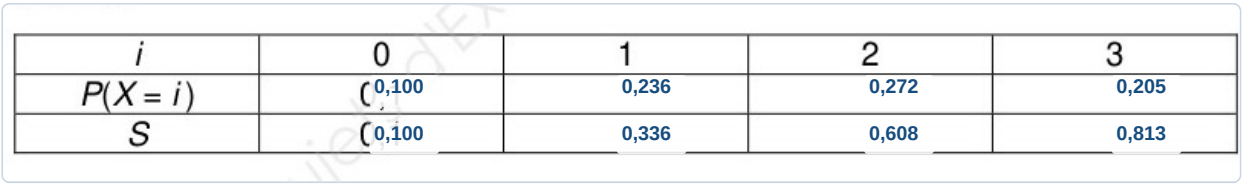
> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = 0) \approx 0{,}100$.

Question 3° a). Faire tourner l'algorithme à la main pour i allant de 0 à 3, puis compléter le tableau avec les valeurs de P(X = i) et les valeurs successives de S.

À chaque étape, l'algorithme ajoute $P(X = i)$ à la somme précédente. Les probabilités sont celles de la loi $\mathcal{B}(50\,;\,0{,}045)$. Les valeurs sont arrondies à 10^{-3}.

i	0	1	2	3
$P(X = i)$	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

Tableau de l'algorithme complété



i	0	1	2	3
$P(X = i)$	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

✓ RÉPONSE À RETENIR

Probabilités : 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. Sommes successives : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat.

À la fin de la boucle, la somme comprend les probabilités pour $i = 0, 1, 2, 3$. Elle représente donc $P(X \leq 3)$, la probabilité qu'au plus trois smartphones du lot soient non réparables.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$S = P(X \leq 3) \approx 0{,}813$, soit environ 81,3 %.

Question 4°. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter cette valeur dans le contexte du lot de smartphones.

Pour une loi binomiale, $E(X) = np$. Ainsi, $E(X) = 50 \times 0{,}045 = 2{,}25$. Cette espérance signifie que, sur un grand nombre de lots de 50 smartphones, le nombre moyen de smartphones non réparables par lot est 2,25.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$E(X) = 2{,}25$ smartphone non réparable en moyenne par lot.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Choisir la valeur de h, arrondie au centième, telle que sous H0 la probabilité que F soit comprise entre 0,55 - h et 0,55 + h soit égale à 0,95.

Sous H_0, la fréquence suit une loi normale de moyenne $0{,}55$ et d'écart type $0{,}037$. L'intervalle central de probabilité 0,95 correspond à environ 1,96 écarts types : $h \approx 1{,}96 \times 0{,}037 = 0{,}07252$. Arrondi au centième, cela donne $0{,}07$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$h = 0{,}07$.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %.

Au seuil de 5 %, l'intervalle d'acceptation associé au test bilatéral est $[0{,}55 - h\,;\,0{,}55 + h]$, soit $[0{,}48\,;\,0{,}62]$. On ne rejette pas H_0 si la fréquence observée appartient à cet intervalle ; sinon, on rejette H_0.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si la fréquence est dans $[0{,}48\,;\,0{,}62]$; la rejeter sinon.

Question 3°. À partir des 76 réponses positives sur 180 personnes interrogées, appliquer la règle de décision et conclure au sujet de l'hypothèse H0 : p = 0,55.

La fréquence observée est $\frac{76}{180} \approx 0{,}422$. Elle est inférieure à la borne basse $0{,}48$ de l'intervalle d'acceptation. Elle appartient donc à la région de rejet du test.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> On rejette H_0 : $p = 0{,}55$ au seuil de 5 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2018, code MATGRB1, d'une durée de deux heures et à coefficient variable selon la spécialité. L'exercice 1 modélise le départ d'un train à très haute vitesse et calcule une aire de pièce. L'exercice 2 traite de l'obsolescence des smartphones par les probabilités conditionnelles, la loi binomiale et un test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- La solution générale d'une équation différentielle avec second membre s'obtient en ajoutant une solution particulière à la solution de l'équation homogène.
- Le signe de f' détermine les variations de f ; ici, f'(t) représente la vitesse instantanée lorsque f est la distance parcourue.
- Pour une loi binomiale de paramètres n et p, P(X = k) = C(n,k)p^k(1-p)^(n-k) et E(X) = np.
- Pour des événements T et L, P(T ∩ L) = P(L)P_L(T) et P(T ∪ L) = P(T) + P(L) - P(T ∩ L).

Points de vigilance & attentes du jury

- Convertir la vitesse exprimée en kilomètres par minute en kilomètres par heure avant de la comparer à 400 km/h.
- Pour une aire entre une courbe et l'axe des abscisses, vérifier le signe de la fonction et les bornes d'intégration.
- Pour justifier une loi binomiale, identifier le nombre fixe d'essais, les deux issues, la probabilité constante et l'indépendance.
- Dans le test bilatéral, comparer la fréquence observée aux deux bornes de l'intervalle de décision et conclure au seuil donné.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment passer de l'équation homogène à la solution complète d'une équation différentielle avec second membre ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, puis ajoutez une solution particulière de l'équation avec second membre. La condition initiale permet ensuite de déterminer la constante de la solution générale.

Q : Comment comparer la vitesse calculée à l'objectif exprimé en kilomètres par heure ?

Si la dérivée donne une vitesse en kilomètres par minute, multipliez-la par 60 pour obtenir des kilomètres par heure. Comparez cette valeur à 400 km/h et vérifiez qu'elle est atteinte avant la limite de deux minutes.

Q : Comment organiser les calculs dans la partie consacrée à la loi binomiale ?

Identifiez n = 50 et la probabilité p = 0,045 d'un smartphone non réparable. Calculez les probabilités demandées avec la formule binomiale, puis additionnez celles correspondant aux valeurs de i indiquées dans l'algorithme.

Q : Comment conclure le test d'hypothèse bilatéral demandé dans le sujet ?

Calculez la fréquence observée, puis comparez-la aux bornes de l'intervalle de décision sous H0 au seuil de 5 %. Si elle est dans l'intervalle, les données ne conduisent pas à rejeter H0 ; sinon, H0 est rejetée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsebcr.fr/assets/annales/bts-ebcr/E2 - Mathématiques/2018/BTS EBCR - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Enveloppe des Bâtiments : Conception et Réalisation : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.