Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS EBCR, veuillez visiter :
btsebcr.fr/annales-sujets-et-corriges

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5**
(Conception et industrialisation en microtechniques) ; 2 (Électrotechnique)

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d'un chariot de fête foraine** (12 questions) — **Page 3**

2. **Étude d'un système électrique par transformée de Laplace** (9 questions) — **Page 6**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsebcr.fr/assets/annales/bts-ebcr/E2 - Mathématiques/2022/BTS EBCR - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse f(t), exprimée en m·s⁻¹, est étudiée en fonction du temps. Les trois parties portent sur une équation différentielle, l'étude de la fonction vitesse et de la distance parcourue, puis le développement limité et la tangente à la courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre sur l'intervalle considéré l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.

Pour $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$, avec $k \in \mathbb{R}$. Ici, $a = 0{,}8$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Comme $g(t) = 5$ est constante, $g'(t) = 0$. Donc $g'(t) + 0{,}8g(t) = 0 + 0{,}8 \times 5 = 4$, ce qui vérifie l'équation.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est solution de $y' + 0{,}8y = 4$.

Question 1. c. Déduire des solutions de l'équation homogène et de la solution particulière g l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Les solutions de l'équation complète s'obtiennent en ajoutant la solution particulière $g(t) = 5$ aux solutions de l'équation homogène.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0{,}8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

Dans la solution générale, $f(0) = k + 5 = 20$, donc $k = 20 - 5 = 15$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0{,}8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. À partir de l'expression f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est 5.

Lorsque $t \to +\infty$, $-0{,}8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Ainsi, $15e^{-0,8t} + 5 \to 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de la limite obtenue que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ étant égale à 5, la courbe C admet une asymptote horizontale d'équation $y = 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. En utilisant f'(t) = -12e$^{-0,8t}$, dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) < 0$. La fonction est strictement décroissante et tend vers 5.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est strictement décroissante de 20 vers 5.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse ne s'annule jamais.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le chariot ne s'arrête pas, sa vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Question 4. a. **Vérifier que F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

$F'(t) = (-18{,}75)(-0{,}8)e^{-0{,}8t} + 5 = 15e^{-0{,}8t} + 5 = f(t)$. Ainsi, F est une primitive de f.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4. b. **À l'aide de l'intégrale de la vitesse, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

Par le théorème fondamental, $d = F(1) - F(0) = (-18{,}75e^{-0{,}8} + 5) - (-18{,}75)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0{,}8} \approx 15{,}33 \text{ m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Parmi les propositions, recopier le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le reste du développement limité à l'ordre 2 doit s'écrire $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. La proposition correcte est donc celle qui contient ce reste.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. **Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.**

On a $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente en 0 a donc pour équation $y = f(0) + f'(0)t$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Étude d'un système électrique par transformée de Laplace

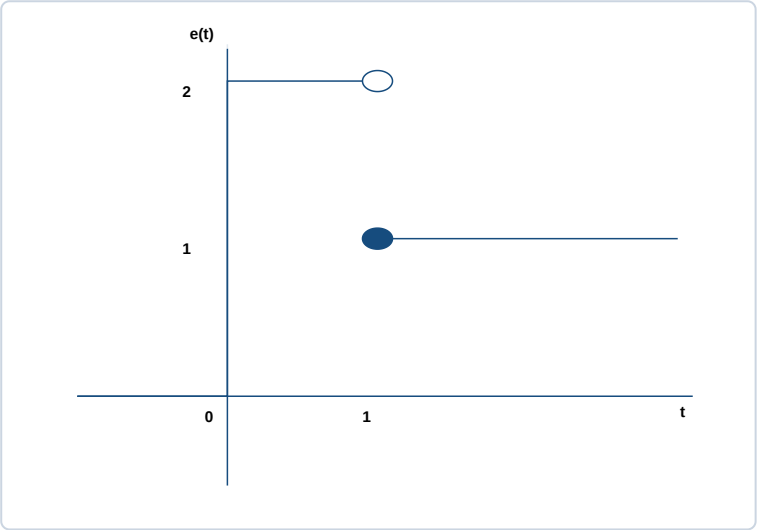
Un système électrique entrée-sortie reçoit le signal causal e(t) = 2U(t) - U(t - 1), avec U la fonction échelon unité, et sa fonction de transfert est H(p) = 1/(p + 1). L'exercice demande d'étudier les signaux d'entrée et de sortie à l'aide des transformées de Laplace, puis de tracer la sortie et d'en déterminer certaines valeurs et limites.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. **Tracer sur le document-réponse la courbe représentative de la fonction e(t).**

Par causalité, **e(t)=0** pour t<0. Comme U(0)=1, le signal vaut déjà 2 en t=0. Il reste égal à 2 jusqu'à t=1 exclu, puis vaut 1 dès t=1. Le tracé comporte donc un point plein en (0 ; 2), un point ouvert en (1 ; 2) et un point plein en (1 ; 1).

Signal d'entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

e(t)=0 si t<0, e(t)=2 si 0≤t<1, et e(t)=1 si t≥1.

Question 2. **Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t).**

Par linéarité et d'après le formulaire, la transformée de U(t) est $1/p$, tandis que celle de U(t-1) est e^{-p}/p. Ainsi :

$$E(p) = 2\frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/[p(p + 1)]]e⁻ᵖ.

La relation du système est $S(p) = H(p)E(p)$. En substituant les expressions données, puis en distribuant le facteur $1/(p+1)$, on obtient :

$$S(p) = \frac{1}{p+1}\frac{2-e^{-p}}{p} = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

Mettons les deux fractions au même dénominateur :

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{p+1-p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}.$$

L'égalité est donc vérifiée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e⁻ᵖ/p et de e⁻ᵖ/(p + 1), en utilisant le formulaire.

Le formulaire donne les inverses de $1/p$ et de $1/(p+1)$. Pour les deux expressions multipliées par e^{-p}, on applique le décalage temporel d'une unité, en multipliant par U(t-1).

Expression	Transformée inverse
$1/p$	U(t)
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	U(t-1)
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. **Déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.**

Avec la décomposition précédente, les termes retardés contiennent U(t-1), nul pour $0 \leq t < 1$. Il reste donc l'inverse de $2(1/p - 1/(p+1))$, soit :

$$s(t) = 2(1 - e^{-t}), \qquad 0 \leq t < 1.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5. a. **Sachant que s(t) = (e - 2)e⁻ᵗ + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), sous forme exacte puis avec une valeur approchée au dixième.**

On substitue $t = 1$ dans l'expression valable sur $[1; +[$, puis on simplifie en utilisant $e\,e^{-1} = 1$:

$$s(1) = (e-2)e^{-1} + 1 = 2 - \frac{2}{e} \approx 1,264.$$

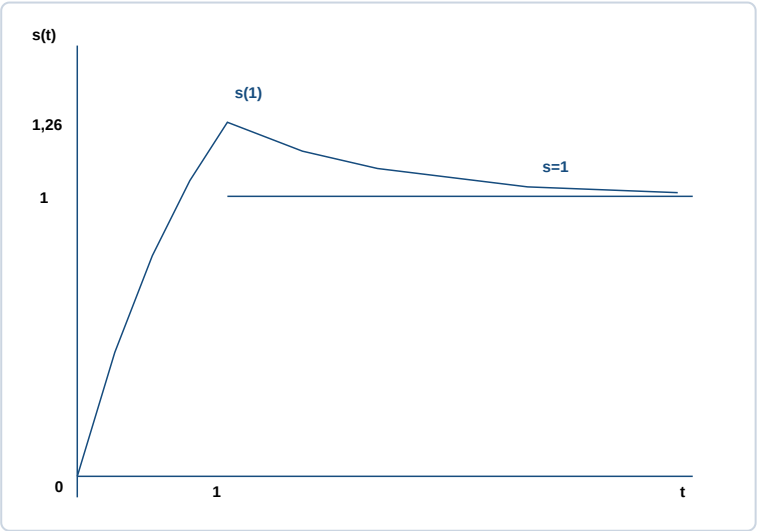
Au dixième, la valeur approchée est 1,3.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1,3.$

Question 5. b. **Compléter sur le document-réponse la courbe représentative de la fonction s.**

Sur $[0; 1[$, la fonction $2(1 - e^{-t})$ croît de 0 à $2 - 2/e$. Cette valeur est aussi celle de la formule donnée pour $t \geq 1$, donc les deux portions se raccordent en $t = 1$. Ensuite, $(e-2)e^{-t} + 1$ décroît vers 1. Le tracé respecte ces variations et l'asymptote horizontale $s = 1$.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe croît jusqu'à $s(1) = 2 - 2/e$, puis décroît vers l'asymptote $s = 1$.

Question 5. c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$. Lorsque t tend vers $+\infty$, le terme exponentiel tend vers 0. La limite est donc la constante restante.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2022, code 22MATGRB2, dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Le sujet étudie le freinage d'un chariot et un système électrique, mobilisant équations différentielles, analyse de fonctions, intégration et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$; une solution particulière permet de résoudre l'équation différentielle complète.
- Si $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, alors $f(t)$ tend vers 5 et la courbe admet l'asymptote horizontale d'équation $y = 5$.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$, calculable à l'aide d'une primitive.
- Un retard d'une unité dans le temps se traduit par un facteur e^{-p} en transformée de Laplace ; $1/(p + 1)$ correspond à e^{-t} pour $t \geq 0$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités et distinguer la vitesse, exprimée en $m \cdot s^{-1}$, de la distance, exprimée en mètres.
- Pour conclure sur l'arrêt, vérifier si la vitesse atteint zéro ; une limite positive ne correspond pas à un arrêt.
- Dans les inversions de Laplace, appliquer le facteur de retard au terme décalé et tenir compte de l'intervalle où il intervient.
- Pour la tangente en zéro, utiliser $f(0)$ et $f'(0)$ dans l'équation $y = f(0) + f'(0)t$.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du freinage ?

Résoudre d'abord l'équation homogène $y' + 0,8y = 0$, puis ajouter une solution particulière constante. Utiliser ensuite la condition initiale $f(0) = 20$ pour déterminer la constante de la solution générale.

Q : Comment décider si le chariot s'arrête à partir de la fonction vitesse ?

Un arrêt correspond à une vitesse nulle à un instant. Ici, la vitesse décroît vers 5 $m \cdot s^{-1}$ et reste positive : sa limite n'est pas zéro, donc le modèle ne prévoit pas l'arrêt du chariot.

Q : Comment répartir le temps sur cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points. Répartissez le temps de façon équilibrée, sans négliger les tracés demandés sur le document-réponse. Gardez une marge pour vérifier les calculs et recopier clairement les réponses.

Q : Quel coefficient faut-il retenir pour cette épreuve ?

Le coefficient officiel est de 1,5 pour la spécialité Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 pour la spécialité Électrotechnique. Le coefficient à retenir dépend donc de la spécialité du candidat.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsebcr.fr/assets/annales/bts-ebcr/E2 - Mathématiques/2022/BTS EBCR - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Enveloppe des Bâtiments : Conception et Réalisation : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.