Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS EBCR, veuillez visiter :
btsebcr.fr/annales-sujets-et-corriges

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22-MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Analyses de biologie médicale : 1 ; Bio analyses et contrôles : 2 ; Biotechnologies : 1 ; Europlastics et composites : 1,5 ; Bioqualité : 2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical (13 questions) **Page 3**

2. Approvisionnement, pannes et contrôle qualité d'une machine à embouteiller (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsebcr.fr/assets/annales/bts-ebcr/E2 - Mathématiques/2022/BTS EBCR - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical

Dans un pays de 60 millions d'habitants, des données annuelles depuis 2013 décrivent le nombre de personnes équipées d'un implant médical. Deux modèles sont étudiés : un ajustement exponentiel à partir des données et une fonction définie par une équation différentielle.

Partie A

Question 1. Compléter le tableau de l'annexe à rendre avec la copie en calculant y = ln(N - 30), avec les valeurs arrondies au millième.

Pour chaque année, on applique $y_i = \ln(N_i - 30)$, avec N_i exprimé en milliers. Les rangs vont de 0 à 8 et les valeurs sont arrondies au millième.

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
y_i	3,268	3,336	3,418	3,497	3,578	3,656	3,738	3,818	3,898

✓ RÉPONSE À RETENIR

y_i : 3,268 ; 3,336 ; 3,418 ; 3,497 ; 3,578 ; 3,656 ; 3,738 ; 3,818 ; 3,898.

Question 2.a. À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement du nuage de points Mᵢ(kᵢ ; yᵢ), sous la forme y = ak + b. Arrondir a et b au centième.

La régression linéaire des points $(k_i ; y_i)$ donne une pente d'environ $0,0794$ et une ordonnée à l'origine d'environ $3,2609$. Après arrondi au centième demandé, les coefficients sont $a = 0,08$ et $b = 3,26$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y = 0,08k + 3,26$.

Question 2.b. À partir de l'équation de la droite d'ajustement, déduire que le nombre de personnes équipées, exprimé en milliers et en fonction du rang k, peut être modélisé par N(k) = 30 + 26,05e^(0,08k).

La transformation $y = \ln(N - 30)$ donne $N = 30 + e^y$. En utilisant la droite ajustée, on obtient $N(k) = 30 + e^{0,08k+3,26} = 30 + e^{3,26}e^{0,08k}$. Comme $e^{3,26} \approx 26,05$, le modèle annoncé est obtenu, avec N exprimé en milliers.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$N(k) = 30 + 26,05e^{0,08k}$, en milliers.

Question 3.a. **En supposant que le modèle proposé reste valide, estimer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant en 2026.**

En 2026, le rang est $k = 2026 - 2013 = 13$. On remplace ce rang dans le modèle : $N(13) = 30 + 26,05e^{0,08\times 13} \approx 103,7$ milliers. L'arrondi au millier de personnes donne donc 104 000 personnes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> En 2026 : **104 000 personnes**.

Question 3.b. **Si le nombre d'habitants du pays reste stable à long terme, déterminer si le modèle étudié peut rester valide à long terme et justifier la réponse.**

Le modèle prévoit $N(k) = 30 + 26,05e^{0,08k}$, qui tend vers $+\infty$ lorsque k augmente. Si la population reste stable à 60 millions, cette prévision finirait par dépasser la population totale du pays, ce qui est impossible.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le modèle croît sans limite et finirait par dépasser les 60 millions d'habitants.

Partie B

Question 1.a. **Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,05y = 0.**

L'équation homogène s'écrit $y' = -0,05y$. Ses solutions sont de la forme $y(t) = Ce^{-0,05t}$, où C est une constante réelle. Cette expression est valable sur $[0;+\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. **Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

1. Pour une solution constante $y = c$, sa dérivée est nulle.
2. L'équation devient $0,05c = 0,05$, donc $c = 1$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution constante est $y = 1$.

Question 1.c. **Résoudre sur [0 ; +∞[l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

Une solution particulière de (E) est la constante 1. Toute solution de l'équation complète est la somme de cette solution particulière et d'une solution de l'équation homogène (E_0).

$y(t) = 1 + Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 1 + Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.d. **En utilisant la condition g(0) = 8, déduire une expression de la fonction g sur [0 ; +∞[.**

On utilise la solution générale $g(t) = 1 + Ce^{-0,05t}$, puis la condition initiale :

1. $g(0) = 1 + C = 8$.
2. Donc $C = 7$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 1 + 7e^{-0,05t}$.

Question 2. **Avec le modèle f(t) = 450/(1 + 7e^(-0,05t)), où t est le temps en années depuis 2013 et f(t) le nombre de personnes en milliers, déterminer au millier près combien de personnes seront équipées en 2026.**

De 2013 à 2026, il s'écoule $t = 2026 - 2013 = 13$ ans. Ainsi, $f(13) = \dfrac{450}{1 + 7e^{-0,05 \times 13}} \approx 96,68$ milliers. L'arrondi au millier de personnes donne 97 000.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> En 2026 : **97 000 personnes**.

Question 3. **Déterminer la limite de f en +∞ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

Lorsque $t \to +\infty$, $e^{-0,05t} \to 0$. Par conséquent, le dénominateur de $f(t) = \dfrac{450}{1 + 7e^{-0,05t}}$ tend vers 1.

La limite vaut 450, soit 450 000 personnes puisque $f(t)$ est exprimée en milliers.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 450$: le modèle prévoit 450 000 personnes à long terme.

Question 4. **À partir de l'expression fournie de f'(t), déterminer le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

L'expression donnée est $f'(t) = \dfrac{315e^{-0{,}05t}}{2(1+7e^{-0{,}05t})^2}$. Pour tout $t \geq 0$, son numérateur et son dénominateur sont strictement positifs.

- Donc $f'(t) > 0$ sur $[0; +\infty[$.
- Le nombre de personnes équipées augmente selon ce modèle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est strictement croissante : le nombre de personnes équipées augmente.

Question 5. **Déterminer à partir de quelle année le nombre de personnes équipées de l'implant dépassera 120 000, soit 120 milliers, et expliquer la méthode employée.**

Résoudre $f(t) > 120$ conduit à $e^{-0{,}05t} < \dfrac{11}{28}$, puis à $t > 20\ln\left(\dfrac{28}{11}\right) \approx 18{,}69$. Le seuil est franchi après 18,69 ans depuis 2013. Pour des années entières, il n'est pas encore dépassé en 2031, mais il l'est en 2032.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le nombre dépasse 120 000 à partir de **2032**.

2. Approvisionnement, pannes et contrôle qualité d'une machine à embouteiller

Dans une usine, une machine à embouteiller est alimentée en eau par un réservoir et en bouteilles vides par une file d'entrée. L'exercice examine les défauts d'approvisionnement, les pannes sur 200 jours et le contrôle statistique du volume d'eau dans les bouteilles.

Partie A - Défaut d'approvisionnement

Question 1. À partir des événements indépendants A et B, de probabilités P(A) = 0,03 et P(B) = 0,02, associer les quatre situations du tableau de gauche aux informations correspondantes du tableau de droite : la file ne se vide pas, la file se vide mais pas le réservoir, les deux se vident au moins une fois, et la machine connaît un défaut d'approvisionnement. Aucune justification n'est demandée.

Situation	Information correspondante
1. La file ne se vide pas	E : 0,97
2. La file se vide, mais pas le réservoir	C : $A \cap \overline{B}$
3. Les deux se vident	F : 0,0006
4. Défaut d'approvisionnement	D : 0,0494

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

1-E ; 2-C ; 3-F ; 4-D.

Partie B - Pannes de la machine à embouteiller

Question 1. La machine tombe en panne chaque jour avec une probabilité de 0,025, indépendamment des autres jours. Pour X, le nombre de jours de panne sur une période de 200 jours, donner sans justification la loi de probabilité suivie par X et préciser ses paramètres.

Chaque jour correspond à une épreuve de Bernoulli, avec une probabilité de panne constante égale à 0,025. Les pannes étant indépendantes sur les 200 jours, leur nombre suit une loi binomiale de paramètres 200 et 0,025.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$X \sim \mathcal{B}(200; 0{,}025)$.

Question 2.a. La loi de X est approchée par une loi de Poisson de paramètre λ. Justifier que λ = 5.

Le paramètre de la loi de Poisson qui approche la loi binomiale est le produit du nombre de jours par la probabilité quotidienne de panne : $\lambda = np = 200 \times 0{,}025 = 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lambda = 5$.

Question 2.b. **Pour Y suivant une loi de Poisson de paramètre 5, donner la valeur de P(Y ≤ 10), arrondie à 10^{-3}.**

Avec le paramètre 5, on additionne les probabilités de 0 à 10 pannes : $P(Y \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} \frac{5^k e^{-5}}{k!} \approx 0{,}9863047$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(Y \leq 10) \approx 0{,}986$.

Question 2.c. **Le graphique suggère que P(Y = 15) = 0. À l'aide de la formule fournie pour la loi de Poisson, déterminer si cette conjecture est vraie ou fausse et justifier.**

Pour une loi de Poisson de paramètre 5, $P(Y = 15) = \frac{5^{15} e^{-5}}{1 \times 2 \times \cdots \times 15}$. Le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs, donc cette probabilité n'est pas nulle. Elle est simplement trop faible pour être distinguée de zéro sur le graphique.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Conjecture fausse : $P(Y = 15) \approx 0{,}000157$, donc la probabilité est strictement positive.

Partie C - Qualité de l'embouteillement

Question 1. **À partir des volumes d'eau et des effectifs du tableau de l'échantillon de 100 bouteilles, déterminer à la calculatrice la moyenne x̄ et l'écart type σ de l'échantillon. Arrondir l'écart type à 10^{-2}.**

Volume (cL)	73	74	75	76	77
Effectif	17	20	43	13	7

La moyenne pondérée est $(73 \times 17 + 74 \times 20 + 75 \times 43 + 76 \times 13 + 77 \times 7)/100 = 74{,}73$ cL. À partir des 100 mesures, l'écart type de la série est $1{,}103\ldots$ cL.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\bar{x} = 74{,}73$ cL et $\sigma \approx 1{,}10$ cL.

Question 2.a. **Pour le test bilatéral H₀ : m = 75 contre H₁ : m ≠ 75 au seuil de confiance de 95 %, la variable $\bar{Z}$ suit sous H₀ une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11. Déterminer h tel que P(75 - h ≤ $\bar{Z}$ ≤ 75 + h) = 0,95, à 10^{-2} près.**

La loi normale centrée réduite contient 95 % de ses valeurs entre $-1{,}96$ et $1{,}96$. Ainsi, l'intervalle demandé a pour demi-largeur $h = 1{,}96 \times 0{,}11 = 0{,}2156$ cL, soit 0,22 cL au centième près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h \approx 0{,}22$ cL.

Question 2.b. **Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de confiance de 95 %.**

Au seuil de 5 %, l'intervalle d'acceptation est centré sur 75 cL. En utilisant la valeur de h arrondie au centième, ses bornes sont $75 - 0{,}22 = 74{,}78$ et $75 + 0{,}22 = 75{,}22$ cL.

1. Si la moyenne observée appartient à cet intervalle, on accepte H_0.
2. Sinon, on rejette H_0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Accepter H_0 si $\bar{x} \in [74{,}78 ; 75{,}22]$ cL ; sinon, la rejeter.

Question 2.c. **À partir des résultats de l'échantillon, déterminer si l'hypothèse H₀ : m = 75 peut être acceptée.**

La moyenne observée est $74{,}73$ cL, tandis que l'intervalle d'acceptation est $[74{,}78 ; 75{,}22]$ cL. Cette moyenne est inférieure à la borne basse : elle n'appartient donc pas à l'intervalle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : on rejette H_0 au seuil de 5 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS Groupement D1, session 2022, code 22-MATGRD1, durée deux heures ; le coefficient varie selon la spécialité, de 1 à 2. Deux exercices de dix points portent sur la modélisation de l'équipement d'un implant médical par ajustement et équation différentielle, puis sur une machine à embouteiller étudiée par les probabilités, la loi de Poisson et un test bilatéral de qualité.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Le changement $y = \ln(N - 30)$ transforme le modèle en relation affine, exploitable par un ajustement des points $(k ; y)$.
- Pour résoudre $y' + ay = b$, on combine la solution de l'équation homogène avec une solution particulière.
- Le nombre de pannes suit une loi binomiale $B(200 ; 0{,}025)$, approchée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.
- Un test bilatéral à 95 % compare la moyenne observée à l'intervalle central de probabilité 0,95 sous H_0.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : les modèles de l'implant donnent un nombre de personnes en milliers.
- Pour 2026, utiliser le rang $k = 13$ en partie A et le temps $t = 13$ en partie B.
- Une probabilité de Poisson peut être très faible sans être nulle : distinguer valeur graphique et valeur exacte.
- Pour le test, utiliser l'écart type 0,11 indiqué pour $\bar{Z}$ et comparer la moyenne observée aux bornes de l'intervalle.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment obtenir le modèle exponentiel à partir des données de la partie A ?

Calculer d'abord $y = \ln(N - 30)$ pour chaque rang k, puis ajuster les points $(k ; y)$ par une droite. En inversant le changement de variable, on obtient $N = 30 + e^{y}$, puis l'expression du modèle.

Q : Pourquoi P(Y = 15) n'est-elle pas exactement nulle ?

La formule de Poisson donne $P(Y = 15) = e^{-5} \times 5^{15}/15!$. Tous les facteurs sont strictement positifs, donc cette probabilité est positive, même si elle est trop petite pour être visible sur le graphique.

Q : Comment gérer le temps pendant cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun dix points et leurs parties sont largement indépendantes. Répartissez le temps entre les exercices, puis gardez quelques minutes pour vérifier les arrondis, les unités et les justifications demandées.

Q : Comment décider si la machine est correctement réglée selon le test ?

Déterminer l'intervalle centré sur 75 qui contient 95 % des valeurs de $\bar{Z}$ sous H_0, avec l'écart type 0,11. Si la moyenne observée est dans cet intervalle, H_0 est acceptée selon la règle du test.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsebcr.fr/assets/annales/bts-ebcr/E2 - Mathématiques/2022/BTS EBCR - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Enveloppe des Bâtiments : Conception et Réalisation : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.