Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS EBCR, veuillez visiter :
btsebcr.fr/annales-sujets-et-corriges

Mathématiques, groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour Traitement des matériaux (2 options) : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (14 questions) **Page 3**

2. Probabilités et estimation dans un magasin de vélos (10 questions) **Page 8**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://btsebcr.fr/assets/annales/bts-ebcr/E2 - Mathématiques/2023/BTS EBCR - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le point M, situé sur le fond d’un tiroir, et le point O, situé sur le fond du meuble, est modélisée par une fonction du temps lors de la fermeture. L’exercice étudie cette fonction par une équation différentielle, ses variations, un algorithme et un développement limité.

Partie A. Résolution d’une équation différentielle

Question 1. a. **Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.**

On factorise le trinôme en cherchant deux nombres dont le produit vaut 4 et la somme 5. Ce sont 1 et 4, donc $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. L’équation devient un produit nul. On annule chacun des facteurs, ce qui donne deux solutions réelles distinctes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1. b. **À l’aide du tableau fourni, résoudre l’équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.**

L’équation caractéristique associée à $y'' + 5y' + 4y = 0$ est $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses deux racines réelles distinctes sont -1 et -4. Le tableau fourni indique que la solution générale est une combinaison linéaire des exponentielles associées aux deux racines. Les constantes de cette combinaison sont réelles.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2. a. **Sachant qu’à l’instant t = 0 le point M est à 20 cm de O et se déplace vers O à la vitesse négative de −10 cm·s⁻¹, déterminer f(0) et f'(0).**

La fonction $f(t)$ représente la distance OM, exprimée en centimètres. À l’instant initial, le point M est à 20 cm de O : cette donnée fixe la valeur de la fonction en zéro. La vitesse signée de déplacement de M vers O est la dérivée de cette distance par rapport au temps. Elle est négative, car la distance diminue pendant la fermeture.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm\cdotps^{-1}.

Question 2. b. **Sachant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ − (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

Pour obtenir la distance deux secondes après le début de la fermeture, on évalue la fonction donnée en $t = 2$. Ainsi, le premier terme devient $\frac{70}{3}e^{-2}$ et le second $\frac{10}{3}e^{-8}$. Leur différence donne la distance exacte en centimètres. Sa valeur approchée est d’environ 3,16 cm.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 3. Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, et justifier.

La fonction f est continue sur $[0; +\infty[$. À 4 secondes, $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,427$ cm, donc $f(4) < 0,5$. Par continuité, la distance est aussi inférieure à 0,5 cm à un instant suffisamment proche de 4, mais antérieur à 4. Le tiroir est donc fermé en moins de 4 secondes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui, le constructeur a raison : le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Partie B. Étude de fonction

Question 1. a. En rappelant que lim e^{-u} = 0 lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Quand t tend vers $+\infty$, les quantités t et $4t$ tendent vers $+\infty$. D'après la limite rappelée dans l'énoncé, e^{-t} et e^{-4t} tendent alors toutes deux vers zéro. Chaque terme de $f(t)$ tend donc vers zéro.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1. b. En déduire que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est égale à zéro. Lorsqu'une fonction tend vers un réel L en l'infini, sa courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = L$. Ici, $L = 0$. L'asymptote recherchée est donc l'axe des abscisses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2. a. Déterminer f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chacun des deux termes de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$, en utilisant $(e^{at})' = ae^{at}$. Le premier terme donne $-\frac{70}{3}e^{-t}$. Pour le second, le coefficient négatif est multiplié par la dérivée de $-4t$, ce qui donne un terme positif. On additionne ces deux dérivées.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2. b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

L'énoncé admet que $f'(t) < 0$ sur tout l'intervalle, donc f y est strictement décroissante. À l'origine, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$. Sa limite en $+\infty$, déterminée précédemment, vaut zéro. Le tableau récapitule le signe de la dérivée et les variations de la fonction.

t	0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variations de f	20	0

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

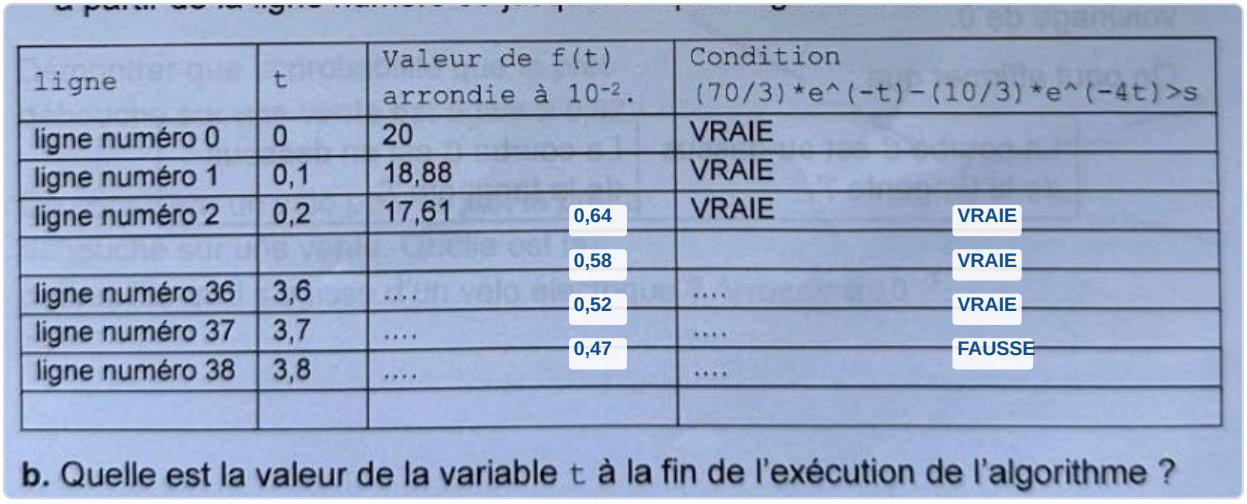
f décroît de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. a. Compléter le tableau de suivi de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en ajoutant des lignes si nécessaire, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme. Indiquer les valeurs de f(t), arrondies à 10⁻², et si la condition de la boucle est vraie ou fausse.

La boucle continue tant que $f(t) > 0,5$. À chaque passage, t augmente de 0,1 seconde. On évalue la fonction aux instants du tableau et on arrondit au centième. À la ligne 38, la condition est encore vraie. Il faut donc ajouter la ligne 39 : la distance y devient inférieure à 0,5 cm et la boucle s'arrête.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition** $f(t) > 0,5$
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

Tableau de l'algorithme complété



ligne	t	Valeur de f(t) arrondie à 10^{-2}.	Condition (70/3)*e^(-t)-(10/3)*e^(-4t)>s
ligne numéro 0	0	20	VRAIE
ligne numéro 1	0,1	18,88	VRAIE
ligne numéro 2	0,2	17,61	VRAIE
ligne numéro 36	3,6	....	....
ligne numéro 37	3,7	....	....
ligne numéro 38	3,8	....	....

0,64 VRAIE
0,58 VRAIE
0,52 VRAIE
0,47 FAUSSE

b. Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête pour $t = 3,9$.

Question 3. b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

À $t = 3,8$, la distance vaut environ 0,52 cm, donc elle est encore supérieure au seuil de fermeture. Après l'incrément de 0,1 seconde, $t = 3,9$ et la distance vaut environ 0,47 cm. La condition de la boucle devient alors fausse et l'algorithme s'arrête. À cet instant, le tiroir est fermé selon le critère de l'énoncé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3,9$ s : le tiroir est fermé.

Question 4. a. À partir du développement limité fourni par le logiciel, déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

Le logiciel donne le polynôme régulier du développement limité à l'ordre deux : $20 - 10t - 15t^2$. Pour déterminer la tangente en zéro, on retient le terme constant, qui donne $f(0) = 20$, et le coefficient de t, qui donne $f'(0) = -10$. La formule de la tangente en zéro est $y = f(0) + f'(0)t$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

T : $y = 20 - 10t$.

Question 4. b. **Parmi les propositions, recopier l'unique expression correcte du développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.**

Le polynôme régulier fourni est $20 - 10t - 15t^2$. Le développement limité à l'ordre deux s'écrit en ajoutant un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers zéro. Parmi les propositions imprimées, la première est celle qui présente cette forme et les coefficients indiqués par le logiciel.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 4. c. **Choisir l'affirmation correcte sur la position de la courbe C par rapport à sa tangente T au voisinage de 0 : la courbe est au-dessus ou en dessous de la tangente. Aucune justification n'est demandée.**

La tangente en zéro a pour équation $y = 20 - 10t$. Le développement limité donne la différence entre la courbe et cette tangente : $f(t) - (20 - 10t) = t^2(-15 + \varepsilon(t))$, avec $\varepsilon(t) \to 0$. Le facteur $-15 + \varepsilon(t)$ reste négatif au voisinage de zéro. Pour $t > 0$ proche de zéro, la différence est donc négative.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Au voisinage de 0, la courbe C est en dessous de la tangente T.

2. Probabilités et estimation dans un magasin de vélos

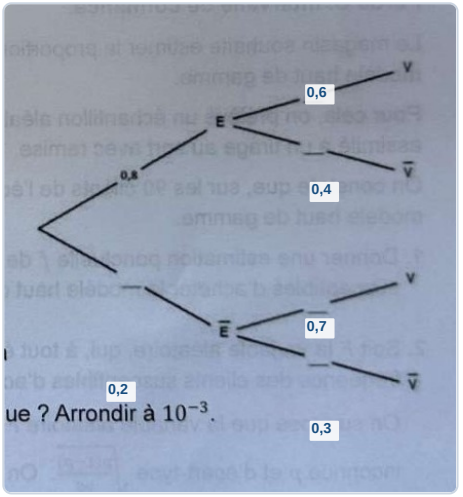
Un magasin prête des vélos électriques ou mécaniques à ses clients et observe si le prêt débouche sur une vente. L'exercice étudie aussi la durée de réparation des vélos et estime la proportion de clients susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme.

Partie A. Probabilités conditionnelles

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré décrivant le type de vélo prêté et l'issue du prêt, vente ou absence de vente, à partir des données fournies.

Les probabilités des branches issues de chaque type de vélo complètent à 1. On inscrit donc les probabilités de vente données, puis leurs complémentaires pour l'absence de vente. L'arbre complété est annoté directement sur le schéma du sujet.

Arbre pondéré complété



ue ? Arrondir à 10^{-3}.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Électrique : 0,8 ; vente : 0,6 ; absence de vente : 0,4. Mécanique : 0,2 ; vente : 0,7 ; absence de vente : 0,3.

Question 2. Déterminer la probabilité qu'un vélo choisi au hasard soit électrique et que le prêt débouche sur une vente, soit P(E ∩ V).

La probabilité du chemin « vélo électrique puis vente » est le produit de la probabilité d'obtenir un vélo électrique et de la probabilité conditionnelle d'une vente pour ce type de vélo : $P(E \cap V) = P(E) \times P_E(V) = 0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}48$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(E \cap V) = 0{,}48$.

Question 3. **Démontrer que la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est égale à 0,62.**

Une vente peut suivre l'un de deux chemins disjoints : vélo électrique vendu ou vélo mécanique vendu. On additionne les probabilités de ces chemins : $P(V) = 0{,}8 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}48 + 0{,}14 = 0{,}62$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(V) = 0{,}62$.

Question 4. **Sachant que le prêt a débouché sur une vente, déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un vélo électrique. Arrondir à 10^{-3}.**

Par la formule de probabilité conditionnelle, $P_V(E) = \frac{P(E \cap V)}{P(V)}$. Avec les probabilités précédentes, $P_V(E) = \frac{0{,}48}{0{,}62} \approx 0{,}7741935$. L'arrondi au millième donne la probabilité demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_V(E) \approx 0{,}774$.

Partie B. Loi binomiale

Question 1. **On considère un échantillon aléatoire de 80 vélos réparés et on admet que X, le nombre de réparations nécessitant moins d'une heure de main-d'œuvre, suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.**

Une réparation est un succès si elle nécessite moins d'une heure de main-d'œuvre, avec une probabilité de $0{,}62$. Pour les 80 réparations, X compte le nombre de succès. La loi binomiale a donc pour paramètres le nombre d'épreuves $n = 80$ et la probabilité de succès $p = 0{,}62$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0{,}62)$.

Question 2. **Déterminer la probabilité P(X = 40). Arrondir à 10^{-3}.**

Pour une loi binomiale, $P(X = 40) = \binom{80}{40}(0{,}62)^{40}(1 - 0{,}62)^{40}$. Ainsi, $P(X = 40) = 10750720873333617646162 0 \times 0{,}62^{40} \times 0{,}38^{40} \approx 0{,}00829$. On arrondit au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = 40) \approx 0{,}008$.

Question 3. **Déterminer la probabilité que, dans l'échantillon, le nombre de vélos nécessitant moins d'une heure de main-d'œuvre soit strictement supérieur au nombre de vélos nécessitant plus d'une heure. Arrondir à 10^{-3}.**

Le nombre de réparations nécessitant plus d'une heure est le complément de X, soit $80 - X$. La condition demandée s'écrit $X > 80 - X$, donc $X \geq 41$. On calcule alors $P(X \geq 41) = 1 - P(X \leq 40) \approx 1 - 0{,}01907 = 0{,}98093$, puis on arrondit au millième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité cherchée est $0{,}981$.

Partie C. Intervalle de confiance

Question 1. **À partir de l'échantillon de 90 clients, dont 54 sont susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme, donner l'estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de ces clients.**

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon : $f = \frac{54}{90} = 0{,}6$. Cette fréquence correspond à 60 % des clients interrogés.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f = 0{,}6$, soit 60 %.

Question 2. a. **À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % pour la proportion p de clients susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme.**

Avec $f = 0{,}6$ et $n = 90$, la formule fournie donne $f \pm 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} = 0{,}6 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}6 \times 0{,}4}{90}}$. Les bornes calculées sont environ 0,498786 et 0,701214, soit au millième :

Borne inférieure	Borne supérieure
0,499	0,701

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}499\,;\,0{,}701]$.

Question 2. b. **Indiquer si l'on est certain que la proportion p appartient à l'intervalle de confiance déterminé.**

Non. L'intervalle calculé à partir de l'échantillon ne garantit pas que la proportion inconnue s'y trouve. Le niveau de confiance de 95 % décrit la fiabilité de la méthode sur des échantillons répétés, et non une certitude pour cet intervalle particulier.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non, on n’en est pas certain.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2023, porte le code 23MATGRB1 et dure 2 heures. Le coefficient est de 2, sauf pour Traitement des matériaux, où il est de 3. Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, portent sur la fermeture d'un tiroir et l'activité d'un magasin de vélos, avec équations différentielles, fonctions, probabilités, loi binomiale et estimation par intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, les racines de l'équation caractéristique déterminent la forme de la solution générale.
- La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation $y = f(a) + f'(a)(t - a)$.
- La formule des probabilités totales donne $P(V) = P(E)P(V|E) + P(\text{non } E)P(V|\text{non } E)$.
- Pour X suivant une loi binomiale de paramètres n et p, $P(X = k) = C(n,k)p^k(1 - p)^{n-k}$; l'intervalle fourni est $f \pm 1{,}96\sqrt{f(1 - f)/n}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités : f(t) est une distance en centimètres et t un temps en secondes.
- Dans l'algorithme, évaluer la condition à la valeur courante de t avant d'ajouter le pas de 0,1 seconde.
- Traduire la comparaison stricte des nombres de réparations en une inégalité portant sur X avant de calculer la probabilité.
- Un intervalle de confiance à 95 % ne garantit pas avec certitude que la proportion inconnue appartienne à l'intervalle obtenu.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment appliquer les conditions initiales à la solution de l'équation différentielle ?

Écrivez la solution générale, puis calculez sa valeur et celle de sa dérivée à t = 0. Utilisez f(0) et f'(0) pour former un système de deux équations et déterminer les constantes de la solution.

Q : Comment traduire la comparaison des durées de réparation avec la loi binomiale ?

Si X compte les réparations de moins d'une heure parmi 80 vélos, le nombre de réparations de plus d'une heure est 80 − X. La condition demandée devient X > 80 − X, soit X > 40.

Q : Comment organiser le temps sur cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et leurs parties peuvent être traitées indépendamment. Commencez par les questions accessibles, avancez sans rester bloqué, puis gardez du temps pour vérifier les calculs, les arrondis et les réponses contextualisées.

Q : Que signifie le niveau de confiance de 95 % pour l'intervalle demandé ?

Le niveau de 95 % décrit la méthode de construction de l'intervalle sur des échantillons répétés. Pour l'échantillon observé, l'intervalle fournit une estimation de p, mais il ne permet pas d'affirmer avec certitude que p s'y trouve.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsebcr.fr/assets/annales/bts-ebcr/E2 - Mathématiques/2023/BTS EBCR - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Enveloppe des Bâtiments : Conception et Réalisation : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.