Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS EBCR, veuillez visiter :
btsebcr.fr/annales-sujets-et-corriges

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Série de Fourier d’une fonction paire périodique (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 13**

Sujet officiel (PDF) : https://btsebcr.fr/assets/annales/bts-ebcr/E2 - Mathématiques/2023/BTS EBCR - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du meuble, O, et le fond du tiroir, M, est modélisée par une fonction du temps exprimée en centimètres. L’exercice étudie l’équation différentielle associée au mouvement, puis les variations de la fonction, le seuil de fermeture, un algorithme et la position moyenne du tiroir.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On cherche deux nombres dont le produit vaut 4 et la somme 5. Les nombres 1 et 4 conviennent, ce qui permet de factoriser directement le trinôme : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. L’équation est donc équivalente à l’annulation de l’un de ces facteurs. Cette méthode fournit les deux racines réelles distinctes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. À l’aide du tableau fourni, résoudre l’équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

L’équation caractéristique associée est $r^2 + 5r + 4 = 0$, dont les racines distinctes sont $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$. Le tableau du sujet indique que, dans ce cas, toute solution de l’équation différentielle est une combinaison linéaire des fonctions exponentielles associées aux racines. Les constantes réelles restent arbitraires tant que les conditions initiales ne sont pas appliquées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À l’instant t = 0, le point M est à 20 cm de O et se déplace vers O à la vitesse de −10 cm·s⁻¹. En déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).

La fonction f représente la distance OM, en centimètres. À $t = 0$, le point M est situé à 20 cm de O, donc la distance initiale est $f(0) = 20$. La dérivée de cette distance par rapport au temps correspond à la vitesse de déplacement. Celle-ci est donnée comme négative et égale à -10 cm·s⁻¹, d’où la valeur de la dérivée initiale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s⁻¹.

Question 2.b. **En utilisant l'expression admise de f(t), déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

On évalue la fonction admise dans l'énoncé à l'instant $t = 2$. Le terme e^{-t} devient e^{-2}, et le terme e^{-4t} devient e^{-8}. En conservant ces exponentielles, on obtient la valeur exacte de la distance recherchée. Pour vérification, l'évaluation numérique donne environ 3,1567 cm.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2.c. **Le tiroir est dit fermé lorsque OM est inférieure à 0,5 cm. Dire si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes et justifier.**

La dérivée s'écrit $f'(t) = \frac{10}{3}e^{-4t}(4 - 7e^{3t})$, qui est négative pour $t \geq 0$: la distance décroît. À 4 secondes, $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,4274$ cm. Cette valeur est inférieure au seuil de 0,5 cm. Puisque la distance est décroissante, le seuil a été franchi avant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le constructeur a raison : la fermeture est atteinte en moins de 4 secondes.

Partie B

Question 1.a. **Sachant que e^{-u} tend vers 0 lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

La fonction étudiée est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les quantités t et $4t$ tendent vers $+\infty$. Ainsi, les exponentielles e^{-t} et e^{-4t} tendent toutes deux vers zéro. La différence de ces deux termes tend donc également vers zéro.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0.$

Question 1.b. **Déduire de la limite de f que sa courbe représentative C possède une asymptote, puis en donner une équation.**

On a établi que la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ est finie et égale à zéro. Une courbe dont l'ordonnée tend vers une valeur finie admet une asymptote horizontale d'ordonnée égale à cette limite. Ici, la distance du tiroir au fond du meuble se rapproche de zéro : l'asymptote correspond à l'axe des abscisses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale en $+\infty$: $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$ avec la règle $(e^{u(t)})' = u'(t)e^{u(t)}$. Le premier terme donne $-\frac{70}{3}e^{-t}$. Pour le second terme, la dérivée de l'exposant $-4t$ apporte le facteur -4, qui se combine avec son coefficient négatif pour donner un terme positif.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Le signe négatif de $f'(t)$ sur l'intervalle donné prouve que f est strictement décroissante. À l'origine, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$. D'autre part, la limite de la fonction en $+\infty$ vaut 0. Le tableau de variations rassemble ces informations, avec une diminution continue de la distance depuis sa valeur initiale.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$-$
Variations de f	20	$\searrow 0$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0, +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en ajoutant si nécessaire des lignes jusqu'à l'arrêt de l'algorithme. Pour chaque ligne, indiquer t, la valeur de f(t) arrondie au centième et le résultat du test de la condition.

L'algorithme commence à $t = 0$ et augmente cette valeur de 0,1 à chaque passage dans la boucle. Le test porte sur la valeur non arrondie de $f(t)$, qui doit rester supérieure à 0,5. Les valeurs affichées dans le tableau sont, elles, arrondies au centième. Le test est encore vrai à 3,8 s, puis devient faux à 3,9 s.

Ligne	t	$f(t)$, au centième	Condition $f(t) > 0,5$
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

La condition devient fausse à la ligne 39, pour $t = 3,9$.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

La boucle poursuit les calculs tant que la distance est strictement supérieure à 0,5 cm. À $t = 3,8$, la distance vaut environ 0,52 cm : la condition est vraie et t augmente de 0,1. À $t = 3,9$, elle vaut environ 0,47 cm : la condition devient fausse et l'algorithme s'arrête. La variable conserve alors cette dernière valeur.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3,9$ s ; la distance est alors inférieure à 0,5 cm.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = 1/4 ∫₀⁴ f(t) dt. Démontrer l'expression de m donnée dans le sujet.

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. La définition donne $m = \frac{1}{4}\big(F(4) - F(0)\big)$. En substituant les bornes, on obtient $m = \frac{1}{4}\left(-\frac{70}{3}e^{-4} + \frac{5}{6}e^{-16} + \frac{70}{3} - \frac{5}{6}\right)$. La simplification fournit exactement l'expression indiquée dans le sujet.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}$ cm.

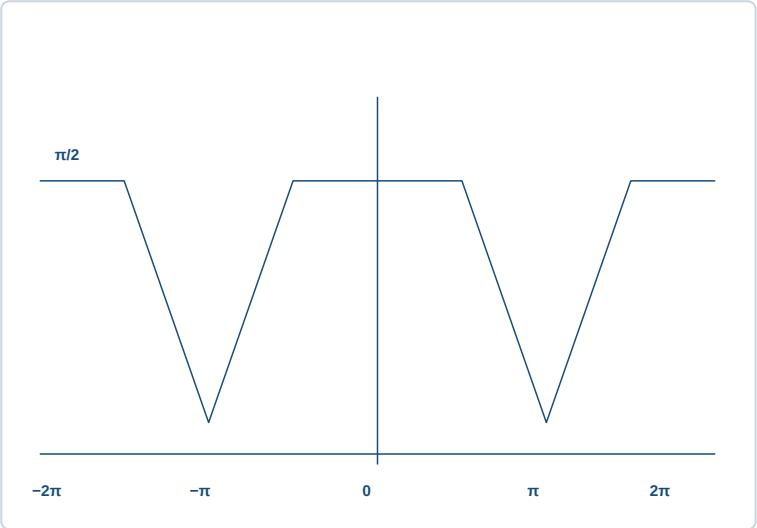
2. Série de Fourier d’une fonction paire périodique

L’exercice étudie une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π], et son développement en série de Fourier. Les questions portent sur son tracé, ses coefficients, une somme partielle, l’identification de sa courbe et l’approximation de la valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de f sur l’intervalle [−2π ; 2π], en tenant compte de sa définition par morceaux, de sa parité et de sa périodicité.

Sur [−π ; π], la courbe est paire : elle vaut π/2 sur [−π/2 ; π/2], puis décroît jusqu’à 0 en t = π et remonte par symétrie jusqu’à 0 en t = −π. On prolonge ce motif par périodes de 2π sur [−2π ; 2π]. Les minima sont donc atteints en −π et π, et les extrémités −2π et 2π ont pour ordonnée π/2.

Tracé de f sur [−2π ; 2π]



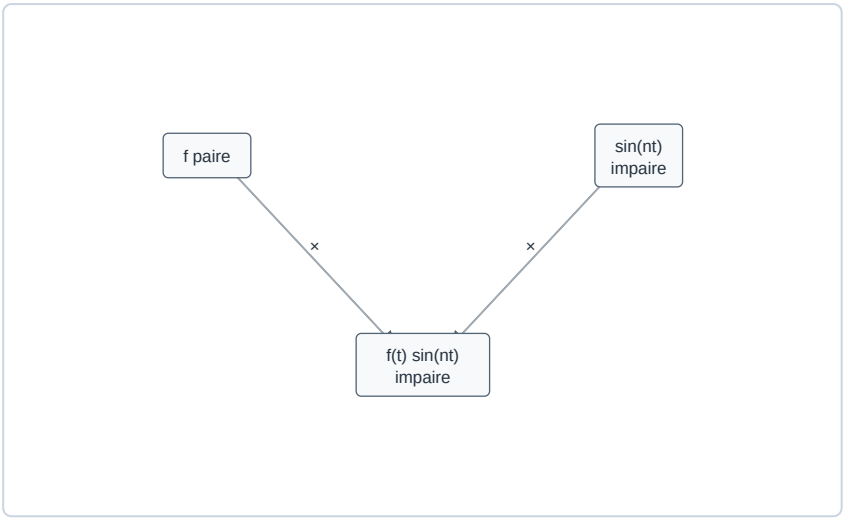
✓ RÉPONSE À RETENIR

Tracé périodique pair : minima nuls en −π et π, plateaux à π/2 autour de 0 et aux extrémités.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Comme f est paire et sin(nt) impaire, le produit f(t)sin(nt) est impair. L’intégrande est aussi 2π-périodique. Son intégrale sur une période peut donc se calculer sur l’intervalle symétrique [−π ; π]. Or l’intégrale d’une fonction impaire sur un intervalle centré en 0 est nulle. La formule du formulaire donne alors $b_n = 0$ pour tout entier $n \geq 1$.

Parité dans le calcul de b_n



Le produit impair a une intégrale nulle sur $[-\pi ; \pi]$.

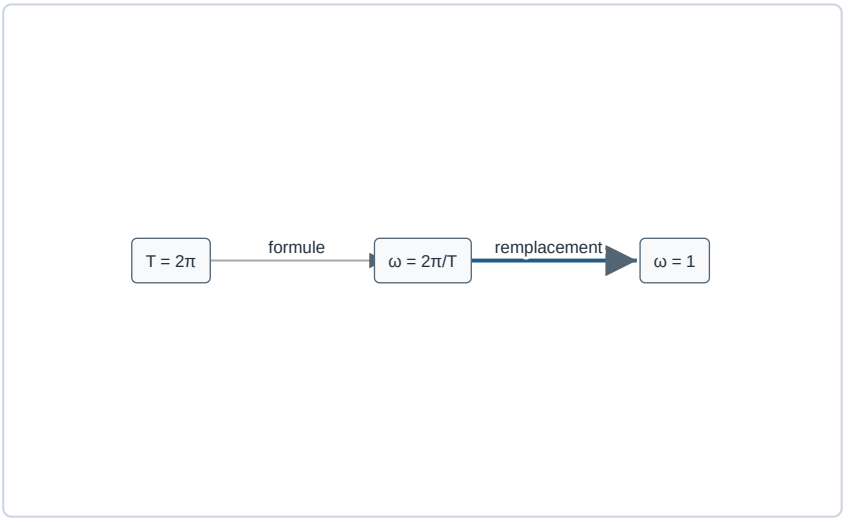
✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

Le formulaire associe à une période T la pulsation $\omega = 2\pi/T$. Ici, $T = 2\pi$. En substituant cette valeur, on obtient $\omega = 2\pi/(2\pi) = 1$. La pulsation vaut donc 1 radian par unité de temps.

Détermination de la pulsation



La pulsation est obtenue à partir de la période.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$ rad·unité de temps^{-1}.

Question 4. **Démontrer que le coefficient a_0 est égal à $3\pi/8$.**

Le formulaire donne $a_0 = (1/T)\int_0^T f(t)dt$. Avec $T = 2\pi$ et la parité de f, on a $a_0 = (1/\pi)\int_0^{pi} f(t)dt$. Sur $[0 ; \pi/2]$, l'intégrale vaut $(\pi/2)(\pi/2) = \pi^2/4$. Sur $[\pi/2 ; \pi]$, elle vaut l'aire du triangle, $\pi^2/8$. Ainsi, $a_0 = (\pi^2/4 + \pi^2/8)/\pi = 3\pi/8$.

Intégrales sur les deux morceaux

Intervalle	f(t)	Intégrale
$[0 ; \pi/2]$	$\pi/2$	$\pi^2/4$
$[\pi/2 ; \pi]$	$\pi - t$	$\pi^2/8$

La somme des intégrales est divisée par π pour obtenir a_0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = 3\pi/8$.

Question 5. **Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $a_n = \int_0^{(\pi/2)} \cos(nt)\,dt + (2/\pi)\int_{(\pi/2)}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt$.**

La parité de f permet d'utiliser la formule $a_n = (2/\pi)\int_0^{pi} f(t)\cos(nt)dt$. On sépare cette intégrale aux bornes de définition de f, soit $\pi/2$. Sur $[0 ; \pi/2]$, $f(t) = \pi/2$ et le facteur $(2/\pi)(\pi/2)$ vaut 1. Sur $[\pi/2 ; \pi]$, $f(t) = \pi - t$. On obtient ainsi exactement l'expression demandée.

Découpage de l'intégrale de a_n

Intervalle	Valeur de f(t)	Contribution
$[0 ; \pi/2]$	$\pi/2$	$\int_0^{(\pi/2)} \cos(nt)dt$
$[\pi/2 ; \pi]$	$\pi - t$	$(2/\pi)\int_{(\pi/2)}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)dt$

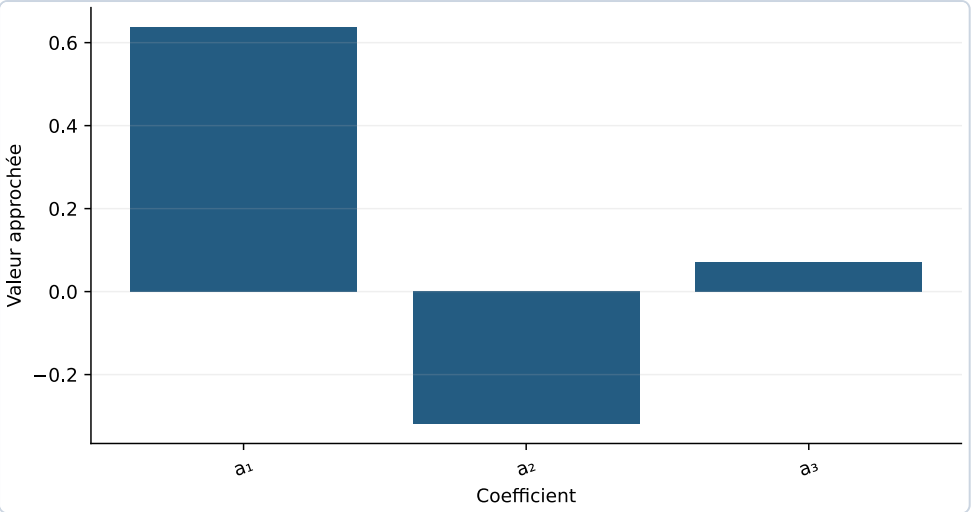
Chaque contribution correspond à un morceau de la définition de f.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \int_0^{(\pi/2)} \cos(nt)dt + (2/\pi)\int_{(\pi/2)}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)dt$.

Question 6. **En utilisant l'expression admise de a_n, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.**

On applique la formule admise $a_n = 2/(\pi n^2)(\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi))$. Pour n = 1, les cosinus valent 0 et −1, donc $a_1 = 2/\pi$. Pour n = 2, ils valent −1 et 1, donc $a_2 = -1/\pi$. Pour n = 3, ils valent 0 et −1, donc $a_3 = 2/(9\pi)$.



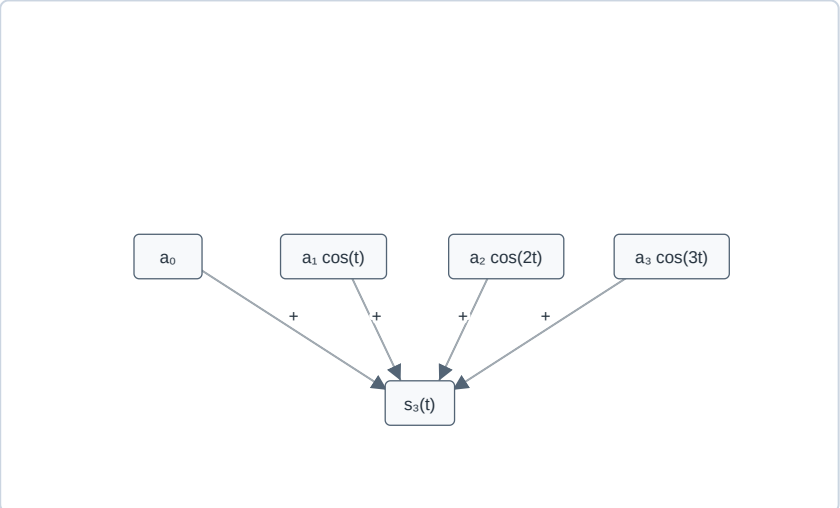
✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = 2/\pi$, $a_2 = -1/\pi$ et $a_3 = 2/(9\pi)$.

Question 7. **Déduire des coefficients l'expression de la somme partielle $s_3(t)$ donnée dans le sujet.**

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$. Les coefficients b_n sont nuls. En remplaçant a_0, a_1, a_2 et a_3 par les valeurs établies précédemment, on obtient l'expression demandée, avec le signe négatif du terme en cos(2t).

Termes de la somme partielle



s_3 additionne le terme constant et les trois termes cosinus.

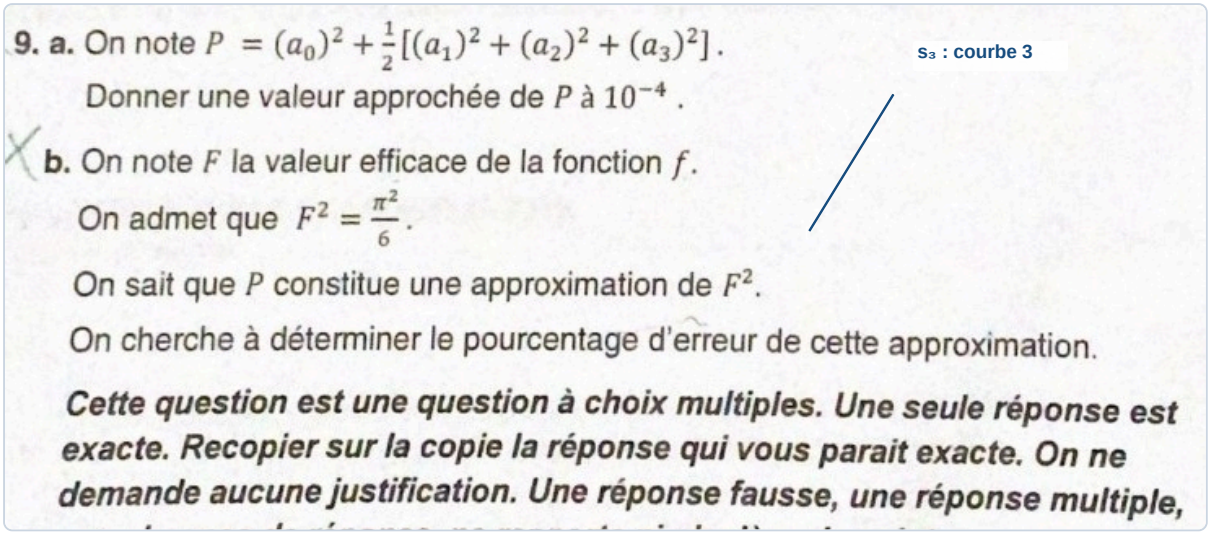
✓ RÉPONSE À RETENIR

$s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.

Question 8. **Sans justification, indiquer laquelle des trois courbes proposées correspond à la fonction s_3.**

Courbe numéro 3.

Courbe correspondant à s_3



✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe numéro 3.

Question 9.a. **Pour $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.**

En utilisant $a_0 = 3\pi/8$, $a_1 = 2/\pi$, $a_2 = -1/\pi$ et $a_3 = 2/(9\pi)$, on obtient $P = 9\pi^2/64 + 409/(162\pi^2)$. L'évaluation de cette expression donne environ 1,6437186. Arrondie à 10^{-4} près, la valeur demandée est donc 1,6437.

Contributions à P

Contribution	Valeur exacte
a_0^2	$9\pi^2/64$
$a_1^2/2$	$2/\pi^2$
$a_2^2/2$	$1/(2\pi^2)$
$a_3^2/2$	$2/(81\pi^2)$
P	$9\pi^2/64 + 409/(162\pi^2)$

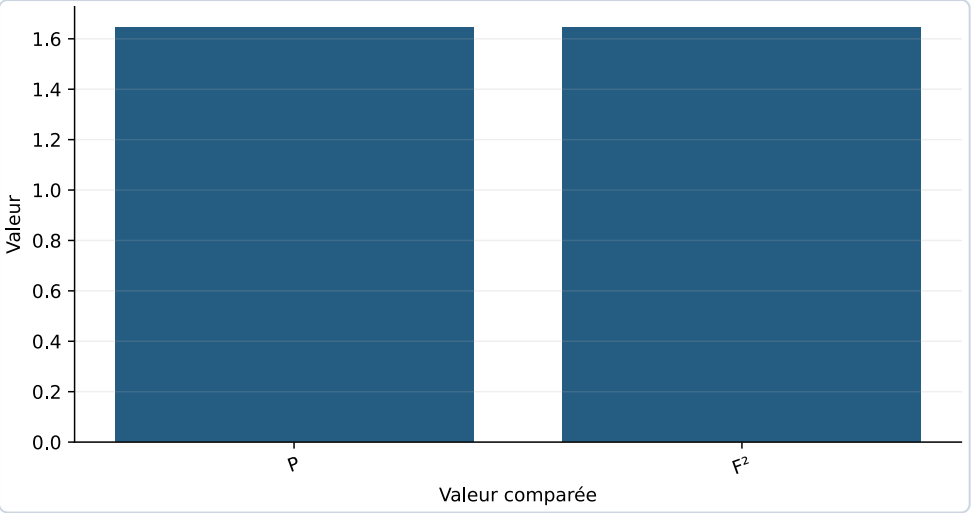
La dernière ligne est la somme des contributions.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P \approx 1{,}6437$.

Question 9.b. **Sachant que $F^2 = \pi^2/6$ et que P constitue une approximation de F^2, choisir parmi 0,1 %, 1 % et 10 % le pourcentage d'erreur de cette approximation. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le pourcentage d'erreur relatif est $|P - F^2|/F^2 \times 100$. Avec $P \approx 1{,}6437186$ et $F^2 = \pi^2/6 \approx 1{,}6449341$, il vaut environ 0,0739 %. Parmi les choix proposés, la valeur correspondante est 0,1 %.



✓ RÉPONSE À RETENIR

0,1 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, porte le code 23MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et 2 en Électrotechnique. Deux exercices de 10 points étudient la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et analyse de fonction, puis une série de Fourier, ses coefficients et l'approximation d'une valeur efficace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour une équation différentielle homogène du second ordre, les racines de l'équation caractéristique déterminent la forme de la solution générale.
- Si f(t) tend vers une limite finie L lorsque t tend vers +∞, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- Pour une fonction paire de période T, $b_n = 0$ et $a_n = 4/T \int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$ pour n ≥ 1.
- L'approximation étudiée de F² utilise $P = a_0^2 + 1/2\ \Sigma(a_n^2)$, avec les coefficients retenus dans le sujet.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer les unités de f(t), en centimètres, et de f'(t), en centimètres par seconde, et conserver le signe de la vitesse initiale.
- Dans l'algorithme, respecter le pas de 0,1 et réévaluer la condition après chaque incrément de t.
- Pour les coefficients de Fourier, exploiter la parité et la période avant de calculer les intégrales.
- Pour le QCM, comparer P à F² et recopier une seule réponse ; une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni ne retire de point.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du tiroir ?

Résoudre d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines donnent la forme générale de f. Déterminer ensuite les constantes avec les conditions initiales f(0) et f'(0).

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice sur Fourier ?

La fonction f est paire et sin(nωt) est impaire. Leur produit est impair sur une période centrée en zéro ; son intégrale sur cette période est nulle, donc $b_n = 0$.

Q : Comment répartir le temps pendant l'épreuve ?

L'épreuve dure 2 heures et les deux exercices valent chacun 10 points. Ils peuvent être traités indépendamment. Répartissez le temps selon votre aisance, gardez un moment pour vérifier les calculs et utilisez une calculatrice autorisée.

Q : Quelles consignes de notation faut-il retenir ?

Les questions demandant de démontrer une égalité ou un résultat nécessitent une démarche justifiée. Le QCM final ne demande aucune justification : une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni ne retire de point.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsebcr.fr/assets/annales/bts-ebcr/E2 - Mathématiques/2023/BTS EBCR - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Enveloppe des Bâtiments : Conception et Réalisation : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.